кости $G^1_{n-1}(u)$ и $G^2_{n-1}(u)$, отвечающие любому направлению u, не совпадают друг с другом. Совокупность всех направлений x в слое P_n точки A_o расслоения $P^o_{n,n}$, которым отвечают гиперплоскости $G^1_{n-1}(x)$ или $G^2_{n-1}(x)$, проходящие через x, в силу (15), (12), (10) и (2) определяется уравнением

$$Q^o_{n-1,2}: \quad a_{ij}\,x^i x^j = 0, \tag{16}$$

и образует гиперконус $Q^o_{n-1,2}$. С другой стороны, линейный гиперкомплекс C^o_{n-1} в слое P_n точки A_o расслоения $P^o_{n,n}$, определяемый уравнением

$$c_{ij}\,x^i y^j = 0, \tag{17}$$

где

$$c_{ij} = \frac{1}{2}\,G_{[ij]}, \tag{18}$$

геометрически характеризуется тем, что каждому направлению $x = (A_o A_i)x^i$ в нуль-системе этого линейного гиперкомплекса отвечает гиперплоскость, проходящая через x и $G^1_{n-1}(x) \cap G^2_{n-1}(x)$. Таким образом, симметрическая и кососимметрическая части тензора Риччи G_{ij} расслоения $P^o_{n,n}$ определяют в слое P_n точки A_o гиперконус $Q^o_{n-1,2}$, определяемый уравнением (16), и линейный гиперкомплекс, определяемый уравнением (17) с учетом (18).

Заметим, что пространство аффинной связности является частным случаем расслоения $P^o_{m,n}$.

Список литературы

1. Норден А.П. Пространства аффинной связности. М., 1976.

2. Ивлев Е.Т. О тангенциально-вырожденных расслоениях. В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 15. Калининград, 1984, с.32-38.

3. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. - Тр. Моск. матем. об-ва, I, 1953, с.275-382.

4. Ивлев Е.Т., Исабеков М.Б. К проективной геометрической интерпретации некоторых образов, определяемых двухвалентными тензорами. - 3-я научная конф. по матем. и мех. Вып. 1. Томск, 1973, с.50-52.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 16 1985

УДК 514.75

О.В. Казнина

ОБ ОТОБРАЖЕНИИ СЕТЕЙ В ЗАДАЧЕ ФУБИНИ-ЧЕХА

В работе рассмотрено одно из свойств сетей Σ_p и $\overline{\Sigma}_p$, сохраняющееся в отображении $f: (V_p \subset E_n) \to (\overline{V}_p \subset E_{p+r})$. Найдены признаки некоторых свойств сетей $\Sigma_p \subset V_p$ и $\overline{\overline{\Sigma}}_p \subset \overline{V}_p$.

1. В евклидовом пространстве E_n к гладкой поверхности V_p присоединим в каждой точке $x \in V_p$ репер $R^x = \{x, \vec{e}_i, \vec{e}_\alpha\}$, $(i,j = 1,\dots,p;\ \alpha,\beta = p+1,\dots,n)$ так, что векторы $\vec{e}_i$ образуют базис касательной плоскости $T_p(x)$ к поверхности V_p, $|\vec{e}_i| = 1$, а $\vec{e}_\alpha$ – базис нормальной плоскости $N_{n-p}(x)$ к V_p, причем $\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta}$. Деривационные формулы репера R^x имеют вид

$$d\vec{x} = \omega^i \vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j + \omega_i^\alpha \vec{e}_\alpha, \quad d\vec{e}_\alpha = \omega_\alpha^i \vec{e}_i + \omega_\alpha^\beta \vec{e}_\beta. \tag{1}$$

Рассмотрим отображение $f: (V_p \subset E_p) \to (\overline{V}_p \subset E_{p+r})$, где поверхность $\overline{V}_p$ получена проектированием поверхности V_p в фиксированную плоскость E_{p+r} вдоль ортогонально дополнительной к ней плоскости $E_{n-(p+r)}$. Плоскость E_{p+r} задана точкой σ и векторами $\vec{e}_{\hat{\alpha}}$ $(\hat{\alpha},\hat{\beta} = p+r+1,\dots,n)$ такими, что $\vec{e}_{\hat{\alpha}} \cdot \vec{e}_{\hat{\beta}} = \delta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$. Присоединим к поверхности $\overline{V}_p$ в каждой точке $x_1 = f(x)$ репер $R^{x_1} = \{x_1, \vec{a}_i, \vec{a}_\tau\}$, $(\tau, \sigma = p+1,\dots,p+r)$, где

$$\vec{a}_i = \vec{e}_i - h_i^{\hat{\alpha}} \vec{e}_{\hat{\alpha}}, \quad \vec{a}_\tau = \vec{e}_\tau. \tag{*}$$

Деривационные формулы репера R^{x_1} запишутся в виде

$$d\vec{x}_1 = \overline{\omega}^i \vec{a}_i, \quad d\vec{a}_i = \overline{\omega}_i^j \vec{a}_j + \overline{\omega}_i^\tau \vec{e}_\tau,$$
$$d\vec{e}_\tau = \overline{\omega}_\tau^i \vec{a}_i + \overline{\omega}_\tau^\sigma \vec{e}_\sigma. \tag{2}$$

Дифференциальные уравнения отображения f имеют вид:

$$\overline{\omega}^i = \omega^i. \tag{3}$$

Пользуясь соотношениями (*), находим:

$$\bar\omega^j_i = \omega^j_i + \omega^{\hat\alpha}_i a^j_{\hat\alpha}, \qquad (4)$$

где $a^j_{\hat\alpha}$ -координаты вектора $\vec a_{\hat\alpha} = \overrightarrow{\text{пр}}_{E_{p+\tau}}\vec e_{\hat\alpha}$ в репере R^{x_1}.
Аналогично, получаем

$$\bar\omega^\tau_i = \omega^\tau_i. \qquad (5)$$

Часть компонент второго тензора $b^\alpha_{ij} = \{b^\tau_{ij}, b^{\hat\alpha}_{ij}\}$ поверхности V_p и компоненты $\bar b^\tau_{ij}$ второго тензора поверхности $\bar V_p$ связаны следующим образом:

$$\bar b^\tau_{ij} = b^\tau_{ij}. \qquad (6)$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (3) и разрешая полученное по лемме Картана, находим:

$$\bar\omega^i_j - \omega^i_j = h^i_{jk}\omega^k, \quad h^i_{jk} = h^i_{kj}, \qquad (7)$$

где функции h^i_{jk} образуют тензор типа (I,2).
Сравнивая (4) и (7), получим выражения:

$$h^i_{jk} = b^{\hat\alpha}_{jk} a^i_{\hat\alpha}. \qquad (8)$$

2. Пусть на поверхности V_p задана сеть Σ_p, тогда на $\bar V_p$ определится ее образ-сеть $\bar\Sigma_p$. Векторы $\vec e_i$ будем брать на касательных к линиям сети Σ_p в точке x. Пусть сеть Σ_p является сопряженной. Рассмотрим линию ω^{j_0} сети Σ_p, $\omega^{j_0}\neq 0$, $\omega^k = 0$, $k\neq j_0$, индекс j_0 -фиксирован, обозначим касательный к ней вектор в точке x через $\vec t = t^{j_0}\vec e_{j_0}$, $t^{j_0}\neq 0$. Непосредственно из (8) следует: а/направление, заданное вектором $\vec t$, f-сопряжено с гиперплоскостью $T_{p-1} = [\vec e_1,\dots,\vec e_{j_0-1},\vec e_{j_0+1},\dots,\vec e_p]$ касательной плоскости $T_p(x)$; б/ если линия ω^{j_0} асимптотическая, то направление, заданное вектором $\vec t$, является f-главным (обратное в общем случае неверно).

Пусть направление, заданное вектором $\vec t = t^{j_0}\vec e_{j_0}$, f-сопряжено с любым направлением, определяемым вектором $\vec\eta = \eta^k\vec e_k$, не лежащим в гиперплоскости $T_{p-1}(x)$, тогда:

$$h^i_{j_0k}t^{j_0}\eta^k = 0 \ (i\neq j_0) \Rightarrow h^i_{j_0j_0} = 0 \quad (i\neq j_0),$$

$$h^{j_0}_{j_0k}t^{j_0}\eta^k = 0 \Rightarrow h^{j_0}_{j_0j_0} = 0.$$

Значит, направление, заданное вектором $\vec t$, является f-главным. Верно и обратное. Следовательно: направление, касательное к линии ω^{j_0} сопряженной сети Σ_p является f-главным тогда и только тогда, когда оно f-сопряжено с любым направлением плоскости $T_p(x)$, не лежащим в плоскости $T_{p-1}(x)$.

3. Известно , что в рассматриваемом отображении образом сопряженной сети $\Sigma_p\subset V_p$ является сопряженная сеть $\bar\Sigma_p\subset\bar V_p$. Обозначим компоненты метрических тензоров поверхностей V_p и $\bar V_p$ соответственно через $\gamma_{ij} = \vec e_i\cdot\vec e_j$, $\bar\gamma_{ij} = \vec a_i\vec a_j$. Используя (*), найдем

$$\bar\gamma_{ij} = \gamma_{ij} - \sum_{\hat\alpha} h^{\hat\alpha}_i h^{\hat\alpha}_j. \qquad (9)$$

Пусть сеть Σ_p -ортогональна, тогда $\gamma_{ij}=0\ (i\neq j)$. В каком случае сеть линий кривизны $\Sigma_p\subset V_p$ отображается в сеть линий кривизны $\bar\Sigma_p\subset\bar V_p$? Имеем

$$\bar\gamma_{ij} = 0 \ (i\neq j) \Leftrightarrow \sum_{\hat\alpha} h^{\hat\alpha}_i h^{\hat\alpha}_j = 0 \quad (i\neq j).$$

Рассмотрим проекции векторов $\vec e_i$ на $E_{n-(p+\tau)}$ вдоль $E_{p+\tau}$ и подсчитаем скалярное произведение:

$$\overrightarrow{\text{пр}}_{E_{n-(p+\tau)}}\vec e_i\cdot \overrightarrow{\text{пр}}_{E_{n-(p+\tau)}}\vec e_j = h^{\hat\alpha}_i\vec l_{\hat\alpha}\, h^{\hat\beta}_j\vec l_{\hat\beta} \quad (i\neq j),$$

или

$$\overrightarrow{\text{пр}}_{E_{n-(p+\tau)}}\vec e_i\cdot \overrightarrow{\text{пр}}_{E_{n-(p+\tau)}}\vec e_j = \sum_{\hat\alpha} h^{\hat\alpha}_i h^{\hat\alpha}_j \quad (i\neq j)$$

Следовательно, справедливо утверждение:

Сеть линий кривизны Σ_p проектируется в сеть линий кривизны $\bar\Sigma_p\subset\bar V_p$ тогда и только тогда, когда ортогональны проекции векторов $\vec e_i$, касательных к линиям сети Σ_p, на пространство $E_{n-(p+\tau)}$ и в каждой точке $x\in V_p$ векторы $\vec b_{ij}$ $(i\neq j)$ лежат в плоскости $\mathcal N_\tau(x)$.

4. Рассмотрим векторы $\vec b_{ij} = b^\alpha_{ij}\cdot\vec e_\alpha$ $(i\neq j)$. Пусть $\vec b_{ij}\subset \mathcal N_{(n-p)-\tau}(x)$, тогда $\vec b_{ij} = b^{\hat\alpha}_{ij}\vec e_{\hat\alpha}$, $b^\tau_{ij}=0$ $(i\neq j)$. Следовательно, в силу (6), получим, что сеть $\bar\Sigma_p$ является сопряженной. Верно и обратное. Итак:

Сеть $\bar\Sigma_p$ является сопряженной тогда и только тогда, когда в каждой точке $x\in V_p$ векторы $\vec b_{ij}$ $(i\neq j)$ лежат в плоскости $\mathcal N_{(n-p)-\tau}(x)$.